

數學科素養導向試題示例說明

數學是一種工具學科，數學科素養教育以培養學生於日常生活及職場環境中，運用數學思考，解決所面臨的問題，並於過程中與人互動、討論，進而養成對於數學應用的正面態度。十二年國民基本教育之課程強調以學習者為中心，學習表現重視認知(概念的了解、程序的執行、問題的解決、連結與應用)、技能(工具的應用)與情意(信念的養成)，學習內容則依不同類群需求(分為數學A、數學B及數學C)，涵蓋其領域之重要概念、原理原則及技能等知識。

技專校院入學測驗中心(以下簡稱本中心)依據教育部公布之《十二年國民基本教育課程綱要技術型高級中等學校-數學領域》規範，從「學習表現」、「學習內容」、「核心素養」等構面進行探究，參酌課程綱要附錄一「數學領域學習重點與核心素養呼應表參考示例」進行研發素養導向試題示例(如附件)，本中心歸納統測數學科素養導向試題之特色可由下列四個向度進行說明：

一、測驗目標：

技高學生應紮實數學知識，學科內容的理解是素養導向試題評量標的之一。技高學生數學學習亦應強化問題解決與專業應用，配合專業領域或日常生活所需之工具與知能，以符號表達、程序運算、圖表繪製等數學方法解決實際發生的問題。統測為分科測驗，數學科測驗目標仍應掌握數學科學科之基礎能力，進而適度納入技高學生跨領域學習經驗(專業領域或日常生活)，以評量學生應用的能力。

二、題幹設計：

素養導向試題題幹設計應完備答題所需之情境與訊息，技高學生透過閱讀試題說明，判斷、篩選重要訊息，並連結至數學概念、程序或方法，正確執行數學運算與關係來解決問題。

三、題材選擇：

素養導向試題題材選擇以技高學生生活經驗或專業學科情境為主，並導引學生善用圖形設計思考，以培養技高學生能在日常經驗中體驗數學的價值，強化務實致用的理念。試題題材選擇可參酌課程綱要附錄二「議題適切融入領域課程綱要」之議題項目。

四、題型發展：

素養導向試題題型以系統化的方式設計，強化數學概念與學生經驗背景的連結，深化以數學做為問題解決工具之應用能力與素養，著重學生探究思考能力。

為使外界更明確了解素養導向試題特色，並使試題更多元，完整評量學生能力，以下將舉例說明。

素養導向試題示例分析表說明：

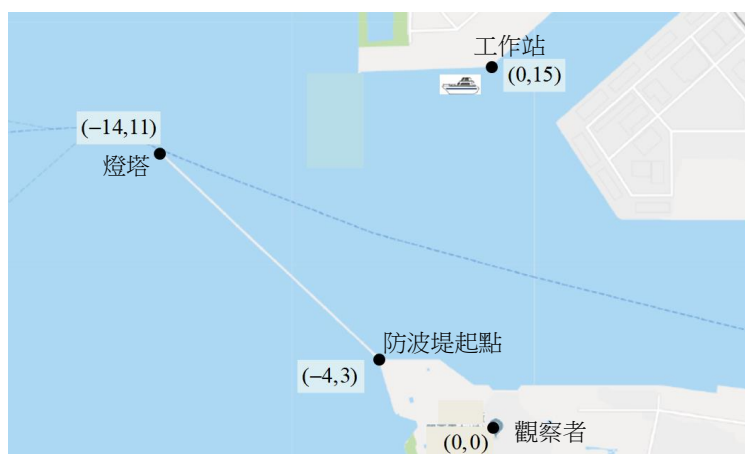
學習內容	對照技術型高級中等學校「數學領域」課程綱要之「學習重點」
學習表現	
說明	說明試題設計理念及對應之核心素養

統測數學素養導向試題示例

【示例 1】

某一港口的燈塔位於一筆直的防波堤末端，現有一艘小艇由防波堤對岸的工作站出發到達防波堤。若以觀察者為原點建立坐標系，則燈塔、防波堤起點、工作站的坐標如圖所示(單位是百公尺)。試問小艇從工作站到防波堤的最短距離大約是多少公尺？

(A)800 (B)1200 (C)1600 (D)2000



正答：B

試題分析

學習內容	坐標系與函數圖形、直線方程式
學習表現	1-V-1 概念的了解 1-V-2 程序的執行
說明	<p>一、本題將「最短距離」與「點到直線的距離」這兩個觀念進行統整，把求最短距離的問題轉換從點到直線的距離之面向進行分析，故須把直線方程式求出，以解決問題。</p> <p>二、運用數學知識精確地使用適當的符號去描述問題情境，以座標系來描述真實環境中景點的相對位置，經由直線方程式來尋求點到線的最短距離。再經由數學觀念判斷$\sqrt{41}$之值落在 6~7 之間，進一步推導估算小艇到防波堤的距離。</p> <p>三、核心素養：數 V-U-A2 系統思考與解決問題、數 V-U-B1 符號運用與溝通表達</p> <p>四、議題融入(海洋教育)：了解海港地理特性且能夠連結並應用數學的概念於海港情境中</p>
試題解析	<p>通過(-14, 11)與(-4, 3)兩點的直線斜率為 $\frac{3-11}{(-4)-(-14)} = \frac{-8}{10} = \frac{-4}{5}$</p> <p>寫出直線方程式為</p> $y-3 = \frac{-4}{5}[x-(-4)] \Rightarrow 5y-15 = -4x-16 \Rightarrow 4x+5y+1=0$

點(0, 15)到直線 $4x+5y+1=0$ 的距離為 $\frac{|4 \times 0 + 5 \times 15 + 1|}{\sqrt{4^2 + 5^2}} = \frac{76}{\sqrt{41}}$ (百公尺)

$\because 36 < 41 < 49$

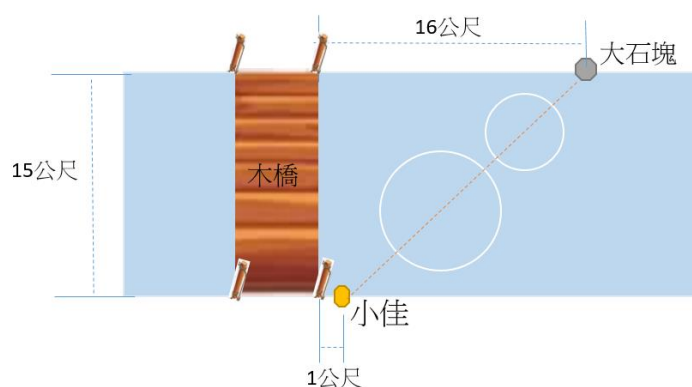
$\therefore \sqrt{36} < \sqrt{41} < \sqrt{49} \Rightarrow 6 < \sqrt{41} < 7 \Rightarrow \sqrt{41} \cong 6.$ **

因此, $\frac{76}{\sqrt{41}} \cong \frac{76}{6} \cong 12$ (百公尺) = 1200 公尺

【示例 2】

小佳在一條河寬 15 公尺的岸邊玩打水漂遊戲，他向河面擲出石頭，石頭沿著直線行進並在水面形成一個個圓形的漣漪。有一個連接兩岸的木橋，如圖所示，若小佳站在木橋頭的木樁右方 1 公尺處，朝對岸方向擲出石頭。石頭彈跳了兩下後剛好擊中對岸的一塊大石頭。若設立一個平面坐標系，小佳所在的河岸為 x 軸，小佳的位置定為 $(1, 0)$ ，大石頭的坐標為 $(16, 15)$ ，則下列哪一個方程式的圖形可為某一個漣漪？

- (A) $x^2 - 4x + y^2 + 6y + 9 = 0$ (B) $x^2 - 12x + y^2 - 10y + 36 = 0$
 (C) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + 4 = 0$ (D) $x^2 - 12x + y^2 + 10y + 45 = 0$



正答：B

試題分析

學習內容	圓方程式、圓與直線的關係
學習表現	1-V-1 概念的了解 1-V-3 問題的解決 1-V-4 連結與應用
說明	<p>一、能求通過已知兩點之直線方程式、圓方程式的一般式與標準式及二者之間的轉換，能由圓的標準式得到圓心坐標。在綜合概念上，能將生活情境問題有關幾何的問題以坐標化方式來解決、參考特定標的物作為坐標原點都是數學上很重要的能力與素養。</p> <p>二、本題以圓方程式來描述漣漪，以直線方程式來描述石頭的方向，並以此描述、解釋打水漂遊戲。在布題上，為符合真實情境有關打水漂遊戲時，人們在意的是比較彈跳次數（多寡或特定次數）、方向準確度、以及石子飛行距離等，因此將學生有興趣的要素選擇適合的要素入題，如彈跳兩次後擊中某特定物。</p> <p>三、辨識圓心是否落在直線方程式上，用以判斷是否可能為此漣漪的形式。</p> <p>四、能瞭解題目敘述有關生活情境的文字表徵與圖形表徵，轉換為直線方程式與圓方程式的式子表徵。圓方程式的一般式與標準</p>

	<p>式兩個式子表徵之間的轉換。</p> <p>五、核心素養：數 V-U-A2 系統思考與解決問題、數 V-U-B1 符號運用與溝通表達</p> <p>六、議題融入(環境教育):參與戶外學習與自然體驗，並能夠運用數學觀念、程序或方法解決問題，從中體驗到數學的價值</p>
試題解析	<p>通過(1, 0)與(16, 15)兩點的直線方程式為 $y = x - 1$</p> <p>以圓方程式來描述真實世界的漣漪：</p> $x^2 - 12x + y^2 - 10y + 36 = 0, (x - 6)^2 + (y - 5)^2 = 25$ <p>以圓心是否落在直線方程式上，判斷是否可能為此漣漪的形式：</p> <p>圓心(6, 5)在 $y = x - 1$ 線上，因此答案是(B)。</p>

【示例 3】

路口發生一起機車撞到路人後駕車逃逸事件，但附近監視器發生故障，警察根據目擊者提供的資訊，發現肇事機車車牌號碼第 1 碼不是 U 就是 V，第 2、3 碼肯定都是 A，第 4、5 碼無法得知，第 6 碼不是 3 就是 8。已知車牌前三碼為英文大寫字母，後三碼為阿拉伯數字，試問滿足上述條件的車牌有多少個？

(A) 200 (B) 400 (C) 800 (D) 1000

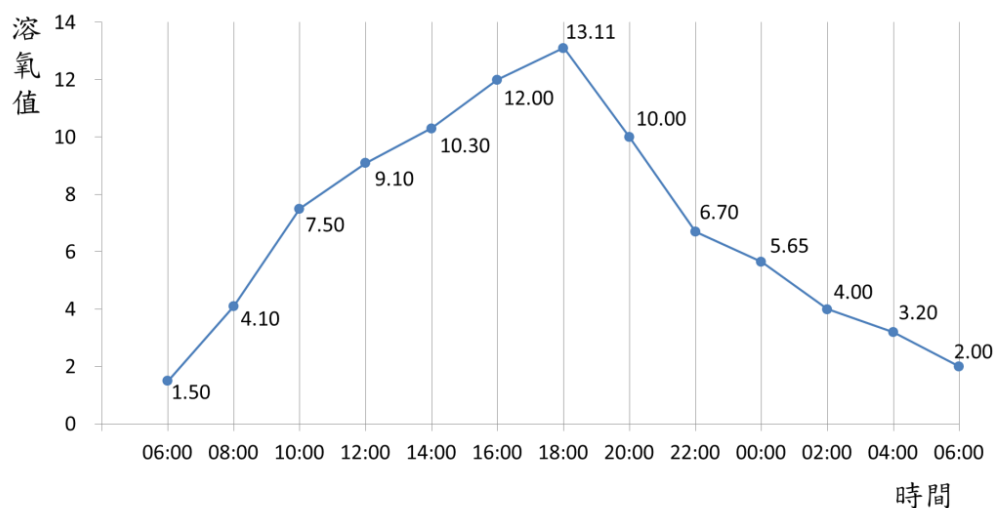
正答：B

試題分析

學習內容	排列組合												
學習表現	1-V-2 程序的執行 1-V-4 連結與應用												
說明	<p>一、本題期望學生能將此問題放到重覆排列的框架裡進行分析，連結重複排列概念到車牌事件情境，使用分解步驟程序去做解釋，並能正確執行乘法原理相關程序，進而解決問題。</p> <p>二、能將機車車牌號碼放到重覆排列的框架裡進行分析，把車牌的形成描述成 6 個步驟，第 i 個步驟先擺放第 i 碼，將生活中車牌號碼問題經由觀察，找出滿足肇事機車車牌號碼條件與各步驟有幾種方式完成的相關性，例如第 1 個步驟只能擺 U 或 V，故有 2 種方法等等，連結重複排列概念到車牌事件情境，找到解決方法。</p> <p>三、能靈活運用乘法原理，判斷每個步驟有幾種方式完成，有效地與車牌事件連結，使用分解步驟程序去做解釋，並能正確執行相關程序，進而解決問題。</p> <p>四、核心素養：數 V-U-A2 系統思考與解決問題、數 V-U-B1 符號運用與溝通表達</p> <p>五、議題融入(人權教育):關心周遭不平的事件，採取行動保護弱勢</p>												
試題解析	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td>U</td> <td>A</td> <td>A</td> <td>0-9</td> <td>0-9</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>V</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>8</td> </tr> </table> <p>$2 \times 1 \times 1 \times 10 \times 10 \times 2 = 400$</p>	U	A	A	0-9	0-9	3	V					8
U	A	A	0-9	0-9	3								
V					8								

【示例 4】

同一環境中，不同溫度的水擁有不同的溶氧量(即每公升水所含氧的毫克數)。若溶氧量急遽下降，水中生物會因溶氧量急遽下降而相繼死亡，因此監控水中溶氧量一直是水產養殖業者一個重要的課題。今有一水產養殖業者在某日六時到隔日六時監控池塘溶氧量的數據資料如圖所示，試問下列各時段中，何者的溶氧變化率最急遽？



(A)6:00-8:00 (B)12:00-14:00 (C)18:00-20:00 (D)22:00-00:00

正答：C

試題分析

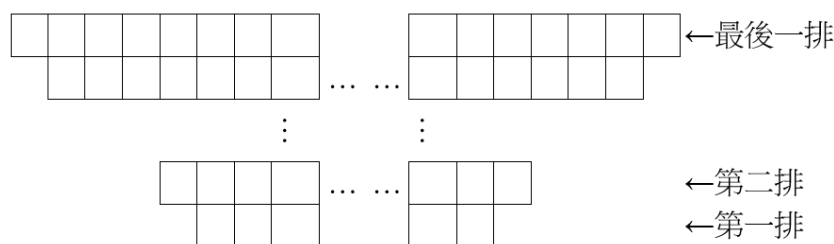
學習內容	直線方程式、微分
學習表現	1-V-1 概念的了解 1-V-2 程序的執行 1-V-3 問題的解決 1-V-4 連結與應用
說明	<p>一、本題以水產養殖業者監控池塘的溶氧量變化為情境，將統計圖表判讀的概念結合在職場應用，依據圖表加以分析溶氧值在各個時段的變化情形。</p> <p>二、直線方程式學習內容中的「斜率」是指線型函數的變化率，變化率又是微分的核心觀念，生活中處處可見它的蹤跡，本題將這個觀念嵌入常識性的情境中，不論是相關學群或是其他學群的學生都能體會其中的數學趣味。</p> <p>三、核心素養：數 V-U-A2 系統思考與解決問題、數 V-U-B1 符號運用與溝通表達</p> <p>四、議題融入(環境教育)：了解水產養殖業關心的溶氧量議題，並能夠運用數學觀念、程序或方法找出變化</p>

試題解析	<p>6:00-8:00 間的溶氧量平均變化率為 $\frac{4.10-1.50}{2} = 1.3$</p> <p>12:00-14:00 間溶氧量平均變化率為 $\frac{10.30-9.10}{2} = 0.60$</p> <p>18:00-20:00 間溶氧量平均變化率為 $\frac{10.00-13.11}{2} = -1.56$</p> <p>22:00-00:00 間溶氧量平均變化率為 $\frac{5.65-6.70}{2} = -0.53$</p> <p>變化量的大小依序為 C>A>B>D</p>
------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

【示例 5】

某單位在一個音樂廣場安排了幾排的座位，如下圖。每一排的座位數都比前面一排多兩個。現有四位同學分別去數了下面的資料：

- A 同學：數出第一排及第二排的座位數
 B 同學：數出第一排的座位數以及總共有幾排
 C 同學：數出第一排及最後一排的座位數
 D 同學：數出最後一排的座位數以及總共有幾排



哪一位同學無法只根據他手中的資料算出這個音樂廣場的總座位數？

- (A) A 同學 (B) B 同學 (C) C 同學 (D) D 同學

正答：A

試題分析

學習內容	數列與級數
學習表現	1-V-1 概念的了解 1-V-3 問題的解決 1-V-4 連結與應用
說明	<p>一、本題以音樂廣場作為背景，將真實情境中計算總座位數的問題連結數列與級數的觀念進行分析，運用數學知識從給定的諸多訊息中探索解決方式。</p> <p>二、學生需理解數列與級數的基本概念，能從題意中瞭解四位同學提出的文字訊息，連結等差級數的式子表徵並找出相關性，做出可行的論述。</p> <p>三、核心素養：數 V-U-A2 系統思考與解決問題、數 V-U-A3 規劃執行與創新應變、數 V-U-B1 符號運用與溝通表達</p>
試題解析	<ul style="list-style-type: none"> ● 從題目可知公差為 2，要算出總座位數，需要知道第一排的座位數及總共幾排。 ● 從最後一排跟第一排的座位數跟公差，可以推出總共幾排。而從最後一排的座位數及總共幾排可以推出第一排的座位數。故 B、C、D 三位同學都可以算出總座位數。 ● A 同學只知道前兩排的座位數是無法得知總排數的。

【示例 6】

篩檢試劑的準確性常以該試劑的靈敏度 (sensitivity) 和特異度 (specificity) 做為參考指標。關於這兩個指標的簡易說明如下：

	感染者 (人數)	健康者 (人數)
檢驗結果為陽性	真陽性 a	偽陽性 c
檢驗結果為陰性	偽陰性 b	真陰性 d

靈敏度(真陽性率) = $\frac{a}{a+b}$: 感染者中檢驗結果為陽性的比率

特異度(真陰性率) = $\frac{d}{c+d}$: 健康者中檢驗結果為陰性的比率

某季節性傳染病每一年都會週期性地在 A 地區流行，某一年該疾病的感染者為 2000 人，健康者為 8000 人，已知該傳染病之檢測試劑的靈敏度和特異度皆為 90%。當年若 A 地區的小新接受該流感檢測結果呈現陽性，則小新為感染者的機率最接近下列何者？

(A) 90% (B) 70% (C) 50% (D) 20%

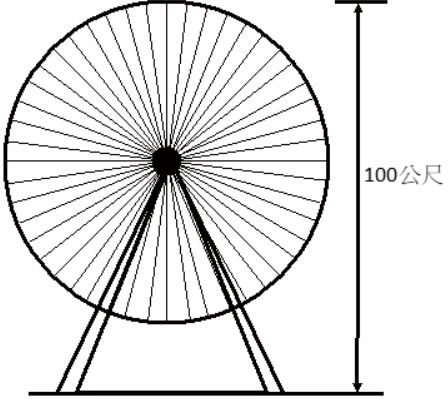
正答：B

試題分析

學習內容	機率與統率									
學習表現	1-V-2 程序的執行 1-V-4 連結與應用									
說明	<p>一、配合當今疫情作為情境，了解生活常見的檢驗試劑的指標，透過數學模型協助我們做正確的判斷。學生就算答題時不熟悉這兩個名詞，只要能理解題目的資訊並不會影響作答。</p> <p>二、學生需理解機率的基本概念，掌握當中的樣本空間是檢測結果為陽性者，而事件是當中的感染者。從題意中假設適當的數據進行簡化計算，並利用題目提供的數據及機率的基本概念解決問題，亦即事件與樣本空間之關係，即可作答。</p> <p>三、核心素養：數 V-U-A2 系統思考與解決問題、數 V-U-A3 規劃執行與創新應變、數 V-U-B1 符號運用與溝通表達</p>									
試題解析	<p>為方便起見，可以假設 A 地區有 10000 人，當中</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th></th> <th>感染者 2000</th> <th>健康者 8000</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>檢驗結果為陽性</th> <td>真陽性 1800</td> <td>偽陽性 800</td> </tr> <tr> <th>檢驗結果為陰性</th> <td>偽陰性 200</td> <td>真陰性 7200</td> </tr> </tbody> </table> <p>※靈敏度和特異度皆為 90%</p> <p>小新可能接受檢測結果呈現陽性，因此小新可能為真陽性或偽陽性中的一人，因此為感染者的機率為 $\frac{1800}{1800+800} = 69.2\% \cong 70\%$</p>		感染者 2000	健康者 8000	檢驗結果為陽性	真陽性 1800	偽陽性 800	檢驗結果為陰性	偽陰性 200	真陰性 7200
	感染者 2000	健康者 8000								
檢驗結果為陽性	真陽性 1800	偽陽性 800								
檢驗結果為陰性	偽陰性 200	真陰性 7200								

【示例 7】

以下是某個遊樂場摩天輪的小檔案：

	<p style="text-align: center;">摩天輪的小檔案</p> <p>高度：100 公尺</p> <p>直徑：70 公尺</p> <p>重量：600 公噸</p> <p>車廂數：48 個 (含 2 個無障礙專用車廂)</p> <p>驅動部分：4 部油壓馬達，共 16 個輪胎，利用齒輪原理轉動鐵軌，使摩天輪運作</p>
-----------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

全班共有 36 人一起搭乘摩天輪，每個車廂都坐 4 人剛好搭乘 9 個連續車廂，小文在第一個車廂，小華在第九個車廂。根據摩天輪小檔案的資訊，當小文在通過最高點後，小文和小華的車廂在同樣高度時，小華的車廂距離地面的高度大約是多少公尺？

(A) 65.3 (B) 82.5 (C) 89.7 (D) 95.3

正答：D

試題分析

學習內容	三角函數
學習表現	1-V-1 概念的了解 1-V-3 問題的解決 1-V-4 連結與應用
說明	<p>一、從摩天輪一圈有 48 個車廂中，得知每個車廂之間為 7.5 度，再從題目訊息得知 9 車廂共橫跨 60 度的車廂。透過首尾車廂等高的訊息，得知所處高度，運用簡易的特殊銳角三角函數即可解題。學生也需要從題目中，得知摩天輪半徑為 35 公尺，且基座高 30 公尺等相關訊息。</p> <p>二、乘坐摩天輪是學生可能有的經驗，其中等高與共同揮手這樣的情況更是許多有搭乘摩天輪經驗所熟悉的情境或行為。學生會有興趣知道目前所處高度，透過已知訊息與等高的訊息來得知所在高度將增加學生解題意願。</p> <p>三、能瞭解題目敘述有關生活情境的文字表徵與圖形表徵，轉換為三角函數的式子表徵。並能從給定的諸多訊息中，挑選解題有用的訊息。</p> <p>四、核心素養：數 V-U-A2 系統思考與解決問題、數 V-U-A3 規劃執行與創新應變、數 V-U-B1 符號運用與溝通表達</p>

試題解析	<ul style="list-style-type: none">● 從題目中，得知摩天輪半徑為 35 公尺，且基座高 30 公尺。● 從摩天輪一圈有 48 個車廂中，得知每個車廂之間為 7.5 度，再從題目訊息得知 9 車廂共橫跨 60 度的車廂。等高時與縱軸夾角為 30 度。透過首尾車廂等高的訊息，得知所處高度為 $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 35 + 35 + 30 \cong 95.3 \quad (\text{公尺})$
------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------